Kako je f Riman integrabilna, na osnovu (7.2) i (7.3) sledi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} gdm = \int_{[a,b]} Gdm.$$

Kako je $g \leq G$, i $\int_{[a,b]}(G-g)dm = 0$, na osnovu Teoreme 5.4 sledi $G = g$ $(s.s.)$. Iz (7.1) sledi $G = f$ $(s.s.)$.

2) Neka je f Riman integrabilna.

Ako je f Riman integrabilna, na osnovu (7.1) važi $G = g(s.s.)$ pa je $f = G = g(s.s.)$.

Funkcija f je neprekidna u tački $t \in [a,b]$ ako i samo ako je $g(t) = G(t)$ (videti Zadatak 7.2). Kako je $G - g = 0$ $(s.s.)$ sledi da je skup prekida funkcije f mere 0.

Obrnuto, neka je $g = G = f$ $(s.s.)$. Kako su g i G merljive, f s.s. jednaka sa njima i mera m kompletna, sledi da je i f merljiva funkcija.

Sada iz $g = G(s.s.)$ sledi

$$\int_{[a,b]} gdm = \int_{[a,b]} Gdm$$

te je Rimanov integral $\int_a^b f(x)dx$ definisan i jednak je sa $\int_{[a,b]} gdm$. ■

Primer 7.1. Neka je $f = \kappa_{(0,1)\cap \mathbf{Q}}$. Ovo je primer funkcije koja je Lebeg-integrabilna, ali nije Riman-integrabilna, jer je svaka tačka iz $(0,1)$ tačka prekida. Lebegov integral je jednak sa $\int_{(0,1)} f\,dm = 1 \cdot m(\mathbf{Q} \cap (0,1)) + 0 \cdot m(Q^c \cap (0,1)) = 0$, jer je skup racionalnih brojeva mere nula.

Primer 7.2. Neka je $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Tada je nesvojstveni Rimanov integral konvergentan i važi

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

ali Lebegov integral $\int_{[0,\infty)} fdm$ ne postoji jer je

$$\int_0^\infty |\frac{\sin x}{x}|\,dx = \infty.$$

Zaista, za proizvoljno $M \in \mathbf{N}$ važi

$$\begin{aligned}\int_\pi^{(M+1)\pi} |\frac{\sin x}{x}|dx &= \sum_{k=1}^{M} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx = \sum_{k=1}^{M} \int_0^\pi \frac{|\sin(t+k\pi)|}{t+k\pi}dt \\ &= \sum_{k=1}^{M} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t+k\pi}dt \geq \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k+1},\end{aligned}$$